2020~2021学年山东济南市中区初三上学期期中数学试卷（B卷）(详解)

一、选择题

（本大题共12小题，每小题4分，共48分）

1. 下列哪个方程是一元二次方程（　）.

A. $x+2y=1$　　B. $x^2-2x+3=0$　　C. $x^2+\frac{1}{x}=3$　　D. $x^2-2xy=0$

【答案】B

【解析】A、D含有两个未知数，C是分式方程，

∴A、C、D都不是一元二次方程，即B为一元二次方程．

故选B．

2. 反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$的图象经过点$(-2,3)$，则它还经过点（　）.

A. $(6,-1)$　　B. $(-1,-6)$　　C. $(3,2)$　　D. $(-2,3.1)$

【答案】A

【解析】由题可得：$k=-2\times 3=6$，

A．$6\times(-1)=-6=-6$，故A正确；

B．$-1\times(-6)=6\neq -6$，故B错误；

C．$3\times 2=6\neq -6$，故C错误；

D．$-2\times 3.1=-6.2\neq -6$，故错误；

故选A．

3. 下列各组线段中，不成比例的是（　）.

A. 4cm、6cm、8cm、10cm　　B. 4cm、6cm、8cm、12cm

C. 11cm、22cm、33cm、66cm　　D. 2cm、4cm、4cm、8cm

【答案】A

【解析】A 选项：$4\times 10\neq 6\times 8$，故A错误；

B 选项：$4\times 12=6\times 8$，故B正确；

C 选项：$11\times 66=22\times 33$，故C正确；

D 选项：$2\times 8=4\times 4$，故D正确．

故选 A．

4. 方程$x^2=2x$的解是（　）．

A. $x_1=0$，$x_2=2$　　B. $x=2$　　C. $x=0$　　D. $x_1=0$，$x_2=\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】　$x^2=2x$，

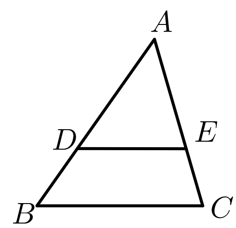
$\therefore x^2-2x=0$，

$x(x-2)=0$，

$x_1=0$，$x_2=2$．

故选A．

5. 如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在AB、AC上，$DE//BC$，若$AD=6$，$DB=3$，则$\frac{AE}{AC}$的值为（　）．



A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

【答案】C

【解析】$\because AD=6$，$DB=3$，

$\therefore AB=AD+DB=9$，

$\because DE//BC$，

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$故选C．

6. 关于x的一元二次方程$x^2-2x+k=0$有两个相等的实数根，则k的值为（　）．

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【答案】A

【解析】方程有两个相同实数根，即$\Delta = 4 - 4k = 0$，$k = 1$，故选A．

7. 一个不透明的盒子里有n个除颜色外其他完全相同的小球，其中有9个黄球．每次摸球前先将盒子里的球摇匀，任意摸出一个球记下颜色后再放回盒子，重复摸球实验后发现，摸到黄球的频率稳定在30%，那么估计盒子中小球的个数n为（　）．

A. 20　　B. 24　　C. 28　　D. 30

【答案】D

【解析】根据题意得$\dfrac{9}{n} = 30\%$，解得$n = 30$，

所以这个不透明的盒子里大约有30个除颜色外其他完全相同的小球．

故选D．

8. 已知点$A(-3, y_1)$，$B(-2, y_2)$，$C(3, y_3)$都在反比例函数$y = \dfrac{4}{x}$的图象上，则（　）．

A. $y_1 < y_2 < y_3$　　B. $y_3 < y_2 < y_1$　　C. $y_3 < y_1 < y_2$　　D. $y_2 < y_1 < y_3$

【答案】D

【解析】$\because$点$A(1, y_1)$、$B(2, y_2)$、$C(-3, y_3)$都在反比例函数$y = \dfrac{4}{x}$的图象上，

$\therefore y_1 = -\dfrac{4}{3}$；$y_2 = -2$；$y_3 = \dfrac{4}{3}$，

$\because \dfrac{4}{3} > -\dfrac{4}{3} > -2$，

$\therefore y_3 > y_1 > y_2$．

故选D．

9. 方程$x^2 - 9x + 18 = 0$的两个根是等腰三角形的底和腰的长，则这个等腰三角形的周长（　）．

A. 12　　B. 15　　C. 12或15　　D. 18

【答案】B

【解析】$x^2 - 9x + 18 = 0$，

$(x-3)(x-6) = 0$，

$x - 3 = 0$，$x - 6 = 0$，

$x_1 = 3$，$x_2 = 6$，

有两种情况：①三角形的三边为3，3，6，此时不符合三角形三边关系定理，

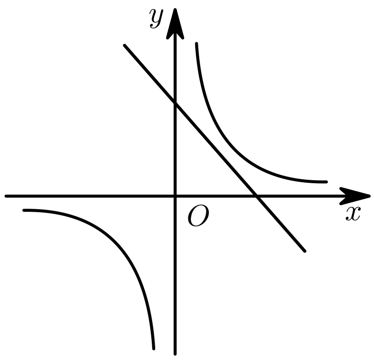
②三角形的三边为3，6，6，此时符合三角形三边关系定理，此时三角形的周长为

$3+6+6=15$，

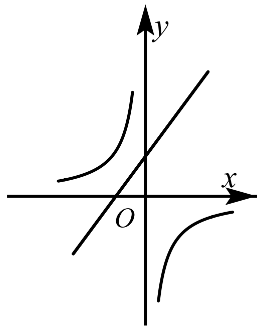
故选：B．

10. 在同一直角坐标系中，函数$y=kx+k$与$y=\frac{-k}{x}$（$k\neq 0$）的图象大致为（　）．

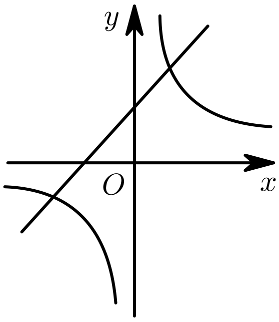
A.



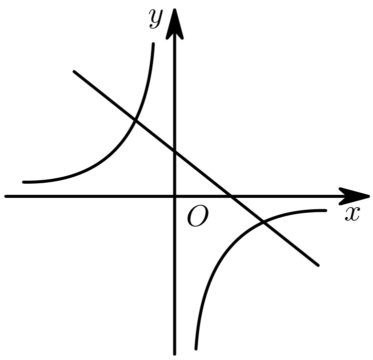
B.



C.



D.



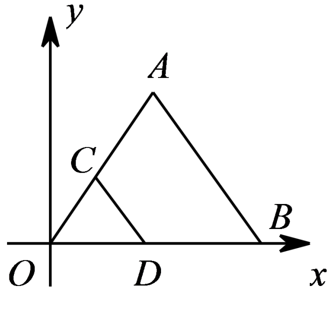
【答案】B

【解析】当$k>0$时，$y=kx+k$过一，二，三象限，$y=\frac{-k}{x}$过二，四象限，选项B符合题意，

当$k<0$时，$y=kx+k$过二，三，四象限，$y=\frac{-k}{x}$过一，三象限，无选项符合题意，

故选：B．

11. 如图，线段CD的两个端点的坐标分别为$C(1,2)$，$D(2,0)$，以原点为位似中心，将线段CD放大得到线段AB，若点B的坐标为$(5,0)$，则点A的坐标为（　）．



A. $(2,5)$　　B. $(3,6)$　　C. $(3,5)$　　D. $(2.5,5)$

【答案】D

【解析】$\because$原点O为位似中心，在第一象限内，将线段CD放大得到AB，

$\therefore B$点与D点是对应点，位似比为$5:2$，

$\because C(1,2)$

$\therefore$点A的坐标为$(2.5,5)$．

故选：D．

12. 在平面直角坐标系中，横、纵坐标都是整数的点叫做整点，已知函数$y=\dfrac{k}{x}(x>0)$的图象G经过点$A(4,1)$，直线$l:y=\dfrac{1}{3}x+b$与图象G交于点B，与y轴交于点C，记图象G在点A，B之间的部分与线段OA，OC，BC围成的区域（不含边界）为W，若区域W内恰有4个整点，则b的取值范围是

（　）．

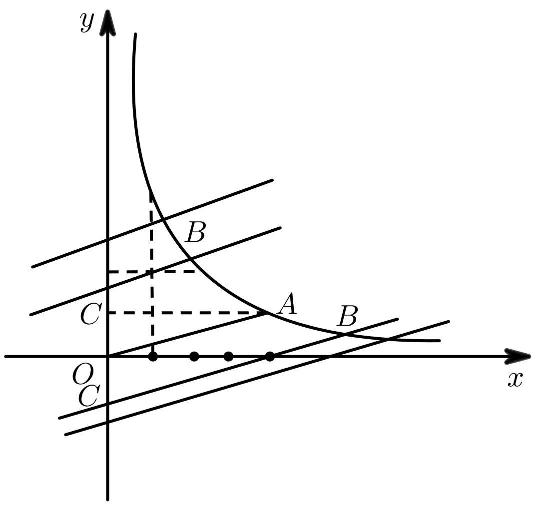
A. $-\dfrac{5}{3}<b\leqslant-\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{3}<b\leqslant\dfrac{8}{3}$

C. $-\dfrac{5}{3}<b\leqslant-\dfrac{4}{3}$或$\dfrac{5}{3}<b\leqslant\dfrac{8}{3}$　　D. $-\dfrac{5}{3}<b\leqslant-\dfrac{4}{3}$或$\dfrac{5}{3}\leqslant b<\dfrac{8}{3}$

【答案】B

【解析】$\because$函数$y=\dfrac{k}{x}$的图象G经过$A(4,1)$，

$\therefore k=4$，



当直线$l:y=\dfrac{1}{3}x+b$在OA上方时，

当直线l过$(1,2)$点时，$\dfrac{1}{3}\times1+b=2$，

解得$b=\dfrac{5}{3}$，此时区域W内只有3个整点，

当直线l过$(1,3)$点时，$\dfrac{1}{3}\times1+b=3$，

解得$b=\dfrac{8}{3}$，此时区域W内恰有4个整点，

$\therefore \frac{5}{3} < b \leqslant \frac{8}{3}$.

当直线$l: y = \frac{1}{3}x + b$在OA下方时，

当直线l过$(4, 0)$时，$\frac{1}{3} \times 4 + b = 0$，

解得$b = -\frac{4}{3}$，

此时，区域W内恰有3个整点，

当$b < -\frac{4}{3}$时，区域W内的整点至少有$(1, 0)$，$(2, 0)$，$(3, 0)$，$(4, 0)$，$(1, -1)$

多于4个．

故当直线l在OA下方时，区域W内不存在恰有4个整点的时候．

故$\frac{5}{3} < b \leqslant \frac{8}{3}$.

故选B．

二、填空题

（本大题共6小题，每小题4分，共24分）

13. 由$4m = 7n$，可得比例式：$\frac{m}{n} =$ ______ ．

【答案】7

【解析】$\because 4m = 7n$，

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{7}{4}$，

故$\frac{m}{n} = 7$．

14. 已知$x = 1$是关于x的方程$ax^2 - 2x + 3 = 0$的一个根，则$a =$ ______ ．

【答案】-1

【解析】将$x = 1$代入方程$ax^2 - 2x + 3 = 0$得$a - 2 + 3 = 0$，解得$a = -1$．

故答案为-1．

15. 已知反比例数$y = \frac{m+2}{x}$ 的图象在第一、三象限，则m的取值范围是 ______ ．

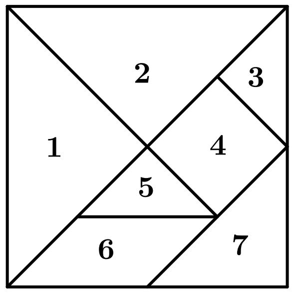
【答案】$m > -2$

【解析】根据题意得$m + 2 > 0$，

解得$m > -2$．

故答案为：$m > -2$．

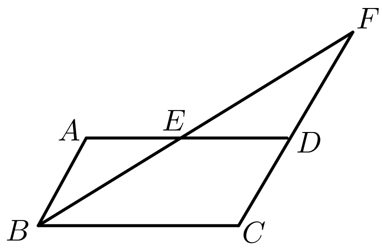
16. 如图，“中国七巧板”是由七个几何图形组成的正方形，其中1、2、3、5、7是等腰直角三角形，4是正方形，6是平行四边形．一只小虫在七巧板上随机停留，则刚好停在5号板区域的概率是______．



【答案】$\frac{1}{16}$

【解析】本题考查求概率．设4号板正方形的边长为1，则5号板直角边长为1，3号斜边长为$\sqrt{2}$，7号板斜边长为2，直角边长为$\sqrt{2}$，则大正方形边长为$2\sqrt{2}$，大正方形的面积为$\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$，5号板的面积为$\frac{1}{2}$，$\therefore$从这个正方形内任取一点，则刚好停在5号板的概率为$\frac{\frac{1}{2}}{8}=\frac{1}{16}$．

17. 如图，在平行四边形$ABCD$中，E是AD边上的中点，连接BE，并延长BE交CD延长线于点F，则$S_{\triangle EAB}$与$S_{\triangle BCF}$的比值是______．



【答案】$1:4$

【解析】$\because E$是AD边上的中点，

$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD$，$\angle F=\angle EBA$，

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$AD//BC$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$，$\triangle EDF\backsim\triangle BCF$，

$\therefore\frac{S_{\triangle EDF}}{S_{\triangle BCF}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$；

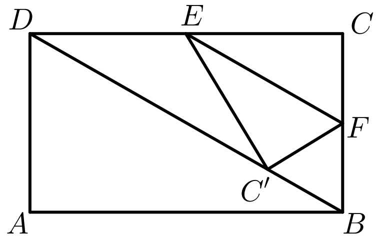
在$\triangle ABE$与$\triangle DFE$中，

$\begin{cases}\angle EBA=\angle F\\ \angle AEB=\angle DEF,\\ AE=DE\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DFE$，

$\therefore \frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{1}{4}$．

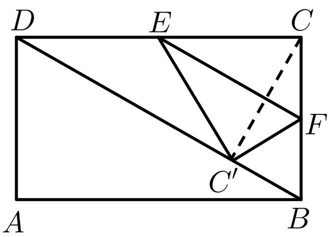
18. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB = 4\sqrt{3}$，$AD = 4$，点E为线段CD的中点，动点F从点C出发，沿$C \to B \to A$的方向在CB和BA上运动，将矩形沿EF折叠，点C的对应点为C'，当点C'恰好落在矩形的对角线上时（不与矩形顶点重合），点F运动的距离为 ______ ．



【答案】2或$4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】分两种情况：

①当C'落在BD上时，连接CC'，



$\therefore CC' \perp EF$，

$\because E$为CD的中点，

$\therefore CE = DE = C'E$，$\angle CC'D = 90^\circ$，$CC' \perp BD$，

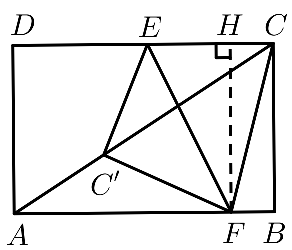
$\therefore EF // BD$，F为BC中点，

在矩形$ABCD$中，$BC = AD = 4$，

$\therefore BF = CF = 2$，

$\therefore F$运动的距离为2．

②当C'落在AC上时，



作$FH \perp CD$于点H，则$CC' \perp EF$，

$\therefore$四边形$CBFH$为矩形，

$\because AD = 4$，$AB = 4\sqrt{3}$，$\angle B = \angle BCD = 90^\circ$，$AB // CD$，

$\therefore BC = AD = 4$，$\tan\angle BAC = \dfrac{4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\angle BAC = 30^\circ$，

$\because EF\perp AC$，

$\therefore\angle AFE = 60^\circ$，

$\because$四边形$CBFH$为矩形，

$\therefore HF = BC = 4$，

$\therefore EH = \dfrac{HF}{\tan 60^\circ} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\because EC = \dfrac{1}{2}CD = 2\sqrt{3}$，

$\therefore BF = CH = CE - EH = 2\sqrt{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore F$运动的距离为$4 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

综上点F运动的距离为2或$4 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

故答案为：2或$4 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

三、解答题

（本大题共7小题，共78分）

19. 解方程：

（ 1 ）$x^2 - 2x - 8 = 0$．

（ 2 ）$x(x-3) = x - 3$．

【答案】（ 1 ）$x_1 = 4$，$x_2 = -2$．

（ 2 ）$x = 3$或$x = 1$．

【解析】（ 1 ）$x^2 - 2x - 8 = 0$

方程变形为$x^2 - 2x = 8$，

$\therefore x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$，

$(x-1)^2 = 9$，

$\therefore x - 1 = \pm 3$，

$\therefore x_1 = 4$，$x_2 = -2$．

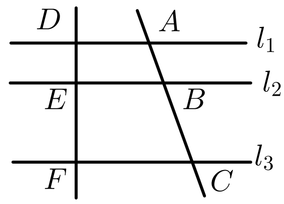
（ 2 ）由原方程得$x(x-3) - (x-3) = 0$，

$(x-3)(x-1) = 0$，

$\therefore x - 3 = 0$或 $x - 1 = 0$，

解得：$x = 3$或$x = 1$．

20. 如图，直线$l_1//l_2//l_3$，直线AC分别交l_1，l_2，l_3于点A，B，C，直线DF分别交l_1，l_2，l_3于点D，E，F．若$DE=3$，$EF=6$，$AB=4$，求线段AC长．



【答案】12．

【解析】$\because l_1//l_2//l_3$，

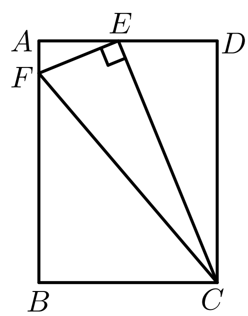
$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$，

即$\dfrac{4}{BC}=\dfrac{3}{6}$，

$\therefore BC=8$，

$\therefore AC=AB+BC=12$．

21. 如图，在矩形$ABCD$中，E为AD上一点，$EF\perp EC$交AB于F，连接FC，求证：$\triangle AEF\backsim\triangle DCE$．



【答案】证明见解析．

【解析】$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore \angle A=\angle D=90^\circ$，

$\therefore \angle AEF+\angle AFE=90^\circ$，

$\because EF\perp EC$，

$\therefore \angle AEF+\angle DEC=90^\circ$，

$\therefore \angle AFE=\angle DEC$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle DCE$．

22.

为响应垃圾分类处理，改善生态环境的号召，某小区将生活垃圾分成四类：厨余垃圾、可回收垃圾、不可回收垃圾、有害垃圾，分别记为a、b、c、d．并且设置了相应的垃圾箱："厨余垃圾"箱，"可回收垃圾"箱，"不可回收垃圾"箱，"有害垃圾"箱，分别记为A，B，C，D．

（ 1 ）如果将一袋有害垃圾任意投放进垃圾箱，则投放正确的概率是______．

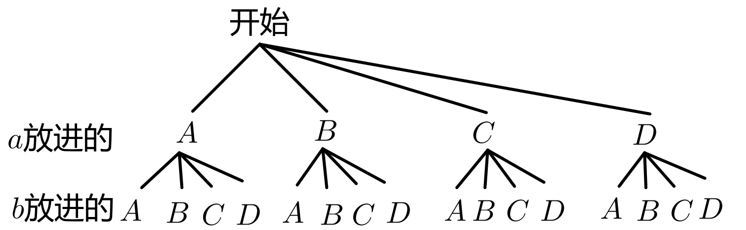
（ 2 ）小明将家里的厨余垃圾、可回收垃圾分装在两个袋中，任意投放在其中两个垃圾箱中，用画树状图或列表的方法求这两袋垃圾都投放正确的概率．

【答案】（ 1 ）$\frac{1}{4}$

（ 2 ）画图见解析，$\frac{1}{16}$．

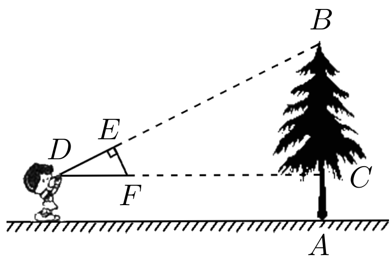
【解析】（ 1 ）将一袋有害垃圾投进垃圾箱有A、B、C、D这4种可能，只有投进D才是投放正确，故概率为$\frac{1}{4}$．

（ 2 ）



共有16种可能，其中只有1种情况是投放正确的，则概率为$\frac{1}{16}$．

23. 如图，小明同学用自制的直角三角形纸板DEF测量树的高度AB，他调整自己的位置，设法使斜边DF保持水平，并且边DE与点B在同一直线上．已知纸板的两条边$DF=50\text{cm}$，$DE=40\text{cm}$，测得边DF离地面的高度$AC=1.5\text{m}$，$CD=12\text{m}$，求树高AB．



【答案】10.5m．

【解析】$\because$在$\text{Rt}\triangle DEF$中，由勾股得：$DE^2+EF^2=DF^2$，即$\therefore 40^2+EF^2=50^2$，

$\therefore EF=30$，

$\because$由题意可知：$\angle BCD=\angle DEF=90^\circ$，$\angle CDB=\angle EDF$，

$\therefore \triangle DCB\backsim\triangle DEF$，

$\therefore \frac{BC}{EF}=\frac{DC}{DE}$，

$\because EF=30\text{cm}=0.3\text{m}$，$DE=40\text{cm}=0.4\text{m}$，$CD=12\text{m}$，

$\therefore \frac{BC}{0.3}=\frac{12}{0.4}$，

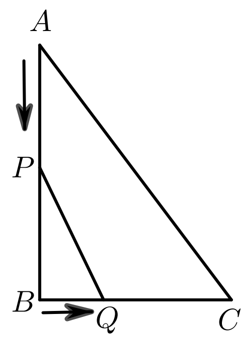
$\therefore BC = 9\text{m}$，

$\because AC = 1.5\text{m}$，

$\therefore AB = AC + BC = 1.5 + 9 = 10.5\text{m}$．

答：树高10.5m．

24. 如图，$\text{Rt}\triangle ABC$中$\angle B = 90^\circ$，$AC = 10\text{cm}$，$BC = 6\text{cm}$，现有两个动点P、Q分别从点A和点B同时出发，其中点P以2cm/s的速度，沿AB向终点B移动；点Q以1cm/s的速度沿BC向终点C移动，其中一点到终点，另一点也随之停止．连结PQ，设动点运动时间为t秒．



（1）用含t的代数式表示BQ为 ______ cm，PB为 ______ cm．

（2）是否存在t的值，使得$\triangle BPQ$的面积等于4cm^2？若存在，请求出此时t的值；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）t；$8 - 2t$

（2）存在；$t = 2$时，$\triangle PBQ$的面积等于4cm^2．

【解析】（1）$\because \angle B = 90^\circ$，$AC = 10\text{cm}$，$BC = 6\text{cm}$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 8\text{cm}$，

$\therefore BQ = t$，$PB = 8 - 2t$．

故答案为：t；$8 - 2t$．

（2）由题意，得$\dfrac{t(8-2t)}{2} = 4$，

解得：$t = 2$（与题意不符，舍去），

$\therefore$当$t = 2$时，$\triangle PBQ$的面积等于4cm^2．

25. 阅读理解题：

定义：如果一个数的平方等于-1，记为$\text{i}^2 = -1$①，这个数i叫做虚数单位．那么和我们所学的实数对应起来就叫做复数，复数一般表示为$a + b\text{i}$（a，b为实数），a叫这个复数的实部，b叫做这个复数的虚部．它的加法，减法，乘法运算与整式的加法，减法，乘法运算类似．

例如：解方程$x^2 = -1$，

解得：$x_1=\mathrm{i}$，$x_2=-\mathrm{i}$．

同样我们也可以化简$\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{2^2\times\mathrm{i}^2}=2\mathrm{i}$．

读完这段文字，请你解答以下问题：

（1）填空：$\mathrm{i}^3=$______，$\mathrm{i}^4=$______，$\mathrm{i}^6=$______，，$\mathrm{i}^{2020}=$______．

（2）在复数范围内解方程：$(x-1)^2=-1$．

（3）在复数范围内解方程：$x^2-4x+8=0$．

【答案】（1）$-\mathrm{i}$；1；-1；1

（2）$x_1=1+\mathrm{i}$，$x_2=1-\mathrm{i}$．

（3）$x_1=2+2\mathrm{i}$，$x_2=2-2\mathrm{i}$．

【解析】（1）$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$，

$\mathrm{i}^4=\left(\mathrm{i}^2\right)^2=(-1)^2=1$，

$\mathrm{i}^6=\mathrm{i}^4\cdot\mathrm{i}^2=1\times(-1)=-1$，

i^n的结果依次为i，-1，$-\mathrm{i}$，1，i，-1，$-\mathrm{i}$，$1\cdots$四个一循环，

$\therefore 2020\div4=505$，

$\therefore \mathrm{i}^{2020}=\mathrm{i}^4=1$．

故答案为：$-\mathrm{i}$，1，-1，1．

（2）$(x-1)^2=-1$，

$\therefore x-1=\mathrm{i}$或$x-1=-\mathrm{i}$，

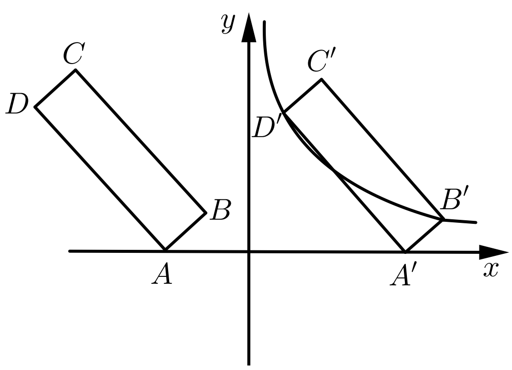
$\therefore x_1=1+\mathrm{i}$，$x_2=1-\mathrm{i}$．

（3）
$$\begin{aligned}&x^2-4x+8=0\\&x^2-4x+4=-4\\&\quad(x-2)^2=-4,\end{aligned}$$

$x-2=2\mathrm{i}$或$x-2=-2\mathrm{i}$，

$x_1=2+2\mathrm{i}$，$x_2=2-2\mathrm{i}$．

26. 如图，在平面直角坐标系中，四边形$ABCD$为矩形，已知点$A(-2,0)$，$B(-1,1)$，$\frac{AB}{AD}=\frac{1}{3}$点$C$、$D$在第二象限内．



（1）点C的坐标______，点D的坐标______．

（2）将矩形$ABCD$向右平移m个单位，得到矩形$A'B'C'D'$，若B'、D'恰好落在反比例函数$y=\dfrac{k}{x}$的图象上，求出此时m的值和反比例函数的解析式．

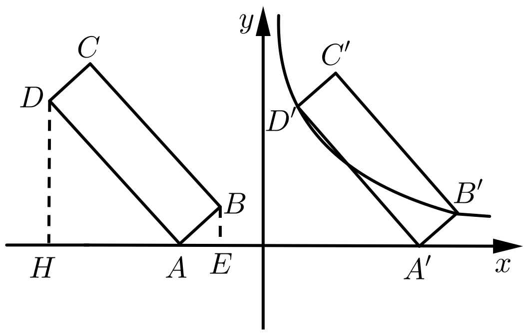
（3）在（2）的情况下，问是否存在y轴上的点P和反比例函数图象上的点Q，使得以P、Q、B'、D'四个点为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出符合题意的点Q的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$(-4,4)$；$(-5,3)$

（2）$y=\dfrac{6}{x}$．

（3）存在；$\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$或$\left(-4,-\dfrac{3}{2}\right)$或$\left(8,\dfrac{3}{4}\right)$．

【解析】（1）



过点B作$BE\perp x$轴于点E，过点D作$DH\perp x$轴于H，

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore\angle BAE+\angle DAH=90^\circ$，

$\because DH\perp x$轴，$BE\perp x$轴，

$\therefore\angle DHA=\angle BEA=90^\circ$，

$\therefore\angle ADH+\angle DAH=90^\circ$，

$\therefore\angle ADH=\angle BAE$，

$\therefore\triangle ADH\backsim\triangle BAE$，

$\therefore\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BE}{AH}=\dfrac{AE}{DH}=\dfrac{1}{3}$，

$\because A(-2,0)$，$B(-1,1)$，

$\therefore E(-1,0)$，

$\therefore AE=BE=1$，

$\therefore AH=DH=3$，

$\therefore OH=OA+AH=5$，

$\therefore$点D的坐标为$(-5,3)$，

由中点坐标公式可知，

C点坐标为$(-1-5+2,1+3-0)$，

即为$(-4,4)$．

故答案为：$(-4,4)$，$(-5,3)$．

（2）将矩形$ABCD$向右平移m个单位得到矩形$A'B'C'D'$，

$\therefore D'$坐标为$(-5+m,3)$，B'坐标为$(-1+m,1)$，

$\because B'$，D'恰好落在反比例函数$y=\dfrac{k}{x}$的图象上，

$\therefore k=3\times(-5+m)=1\times(-1+m)$，

解得$m=7$，$k=6$，

$\therefore m$的值为7，反比例函数解析式为$y=\dfrac{6}{x}$．

（3）由（2）可知，$m=7$，$k=6$，

$\therefore B'(6,1)$，$D'(2,3)$，

设P点坐标为$(0,n)$，

若以$B'P$为对角线构成的平行四边形，则Q点坐标为$(4,n-2)$，

$\because$点$Q(4,n-2)$在反比例函数$y=\dfrac{6}{x}$上，

$\therefore 4(n-2)=6$，

解得$n=\dfrac{7}{2}$，

$\therefore Q$点坐标为$\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$，

若以$D'P$为对角线构成的平行四边形，则Q点坐标为$(-4,n+2)$，

$\therefore -4(n-2)=6$，

解得$n=-\dfrac{7}{2}$，

$\therefore Q$点坐标为$\left(-4,-\dfrac{3}{2}\right)$，

若以$B'D'$为对角线构成的平行四边形，则Q坐标为$(8,4-n)$，

$\therefore 8(4-n)=6$，

解得$n=\dfrac{13}{4}$，

$\therefore Q$点坐标为$\left(8,\dfrac{3}{4}\right)$，

$\therefore y$轴上存在点P和反比例图象上的点Q，

值得以P，Q，B'，D'为项点的四边形是平行四边形，Q点的坐标为$\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$或$\left(-4,-\dfrac{3}{2}\right)$或$\left(8,\dfrac{3}{4}\right)$．

27. 如图，在矩形$ABCD$中，$AD=kAB(k>0)$，点E是线段CB延长线上的一个动点，连接AE．过点A作$AF\perp AE$交射线DC于点F．

（1）如图1，若$k=1$，则AF与AE之间的数量关系是 ______ ．

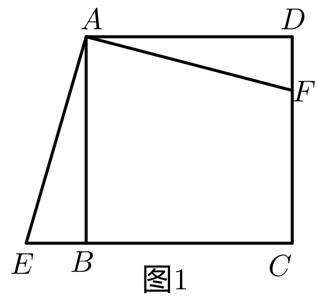
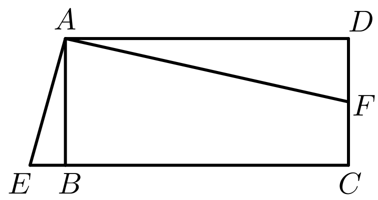
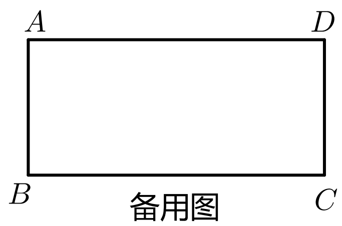


图1

（2）如图2，若$k \neq 1$，试判断AF与AE之间的数量关系，写出结论并证明．（用含k的式子表示）



（3）若$AD = 2AB = 4$，连接BD交AF于点G，连接EG，当$CF = 1$时，求EG的长．



备用图

【答案】（1）$AE = AF$

（2）$AF = kAE$，证明见解析．

（3）$\dfrac{5\sqrt{17}}{6}$或$\dfrac{\sqrt{41}}{2}$．

【解析】（1）当$k = 1$时，$AD = AB$，

$\because \angle EAB + \angle BAF = \angle BAF + \angle FAD = 90^\circ$，

$\therefore \begin{cases} \angle EAB = \angle FAD \\ AB = AD \\ \angle EBA = \angle FDA = 90^\circ \end{cases}$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AE = AF$．

（2）$\because \angle EAB + \angle BAF = \angle BAF + \angle FAD = 90^\circ$

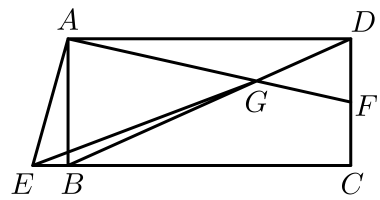
$\therefore \begin{cases} \angle EAB = \angle FAD \\ \angle ABE = \angle ADF \end{cases}$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ADF$，

$\therefore \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{kAB}{AB} = k$，

$\therefore AF = kAE$．

（3）①如图1，



当点F在DC上时，

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB=CD$，$AB//CD$，

$\because AD=2AB=4$，

$\therefore AB=2$，

$\therefore CD=2$，

$\because CF=1$，

$\therefore DF=CD-CF=2-1=1$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADF$中，$\angle ADF=90^{\circ}$，

$\therefore AF=\sqrt{AD^{2}+DF^{2}}=\sqrt{4^{2}+1^{2}}=\sqrt{17}$，

$\because DF//AB$，

$\therefore \angle GDF=\angle GBA$，$\angle GFD=\angle GAB$，

$\therefore \triangle GDF \backsim \triangle GBA$，

$\therefore \dfrac{GF}{GA}=\dfrac{DF}{BA}=\dfrac{1}{2}$，

$\because AF=GF+AG$，

$\therefore AG=\dfrac{2}{3}AF=\dfrac{2}{3}\sqrt{17}$，

$\because \triangle ABE \backsim \triangle ADF$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{17}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle EAG$中，$\angle EAG=90^{\circ}$，

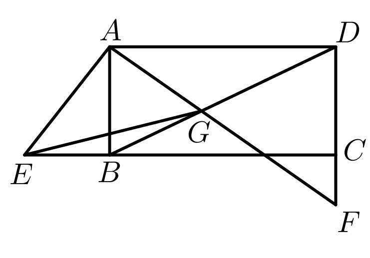
$\therefore EG=\sqrt{AE^{2}+AG^{2}}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)^{2}+\left(\dfrac{2\sqrt{17}}{3}\right)^{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{17}{4}+\dfrac{68}{9}}$

$=\dfrac{5\sqrt{17}}{6}$，

②如图2，



当点F在DC的延长线上时$DF=CD+CF=2+1=3$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADF$中，$\angle ADF=90^{\circ}$，

$\therefore AF=\sqrt{AD^{2}+DF^{2}}=\sqrt{4^{2}+3^{2}}=5$，

$\because DF//AB$，

$\therefore \angle GAB=\angle GFD$，$\angle GBA=\angle GDF$，

$\therefore \triangle AGB\backsim\triangle FGD$，

$\therefore \dfrac{AG}{FG}=\dfrac{AB}{FD}=\dfrac{2}{3}$，

$\because GF+AG=AF=5$，

$\therefore AG=2$，

$\because \triangle ABE\backsim\triangle ADF$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{1}{2}\times 5=\dfrac{5}{2}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle EAG$中，$\angle EAG=90^{\circ}$，

$\therefore EG=\sqrt{AE^{2}+AG^{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2}+2^{2}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}+4}=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$，

综上所述，EG的长为$\dfrac{5\sqrt{17}}{6}$或$\dfrac{\sqrt{41}}{2}$．