

# 2020~2021学年山东济南历下区初二上学期期中数学试卷(详解)

## 一、选择题

(本大题共12小题,每小题4分,共48分)

1. 已知一个数的立方根是  $-\frac{1}{2}$ , 那么这个数是 ( ).

- A.  $-\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{8}$                       D.  $-\frac{1}{8}$

【答案】 D

【解析】  $\because$  一个数的立方根是  $-\frac{1}{2}$ ,

$\therefore$  这个数是  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ ,

$\therefore$  A、B、C选项错误,不符合题意.

故答案为: D.

2. 下列数是无理数的是 ( ).

- A.  $-\frac{22}{7}$                       B.  $\pi$                       C. 0                      D.  $0.2\dot{3}$

【答案】 B

【解析】 A选项:  $-\frac{22}{7}$  为分数,是有理数,不符合题意.

B选项:  $\pi$  为无理数,符合题意.

C选项: 0 为整数,是有理数,不符合题意.

D选项:  $0.2\dot{3}$  为无限循环小数,是有理数,不符合题意.

故选 B.

3. 下列函数中,  $y$  是  $x$  的正比例函数的是 ( ).

- A.  $y = 6x - 1$                       B.  $y = \frac{1}{x}$                       C.  $y = x^2$                       D.  $y = -\frac{1}{2}x$

【答案】 D

【解析】 A选项:  $y = 6x - 1$  是一次函数,不是正比例函数,故此选项不合题意;

B 选项： $y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数，不是正比例函数，故此选项不合题意；

C 选项： $y = x^2$ 是二次函数，不是正比例函数，故此选项不合题意；

D 选项： $y = -\frac{1}{2}x$ 是正比例函数，故此选项符合题意。

故选 D。

4. 如图是北京市地图简图的一部分，图中“故宫”、“颐和园”所在的区域分别是（ ）。

	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
6	颐和园	奥运村	
7		故宫	日坛
8		天坛	

A. *D7*, *E6*

B. *D6*, *E7*

C. *E7*, *D6*

D. *E6*, *D7*

【答案】 C

【解析】 由图可知，“故宫”位置是*E7*，“颐和园”位置是*D6*，

∴ABD选项错误，不符合题意。

故选C。

5. 下列选项中，运算正确的是（ ）。

A.  $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$

B.  $\sqrt{8} \times \sqrt{18} = 12$

C.  $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5$

D.  $\sqrt{21} \div \sqrt{3} = 7$

【答案】 B

【解析】 A 选项： $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

∴A选项错误，不符合题意；

B 选项： $\sqrt{8} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6 \times 2 = 12$ ，

∴B选项正确，符合题意；

C 选项： $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，

∴C选项错误，不符合题意；

D 选项： $\sqrt{21} \div \sqrt{3} = \sqrt{7}$ ，

∴D选项错误，不符合题意。

故选 B。

6. 在平面直角坐标系中，点 $P(-2, x^2 + 1)$ 所在的象限是（ ）。

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 B

【解析】  $\because x^2 \geq 0$ ,

$$\therefore x^2 + 1 \geq 1,$$

$\therefore$ 点 $P(-2, x^2 + 1)$ 在第二象限.

故选: B.

7. 在平面直角坐标系中, 若点 $M(-2, 3)$ 与点 $N(-2, y)$ 之间的距离是5, 那么 $y$ 的值是 ( ).

A. -2

B. 8

C. 2或8

D. -2或8

【答案】 D

【解析】 因为点 $M$ 和点 $N$ 的横坐标相同,

所以由题意得 $|3 - y| = 5$ , 即 $3 - y = 5$ 或 $3 - y = -5$ ,

解得 $y = -2$ 或 $y = 8$ ,

故选D.

8. 已知点 $A(-2, y_1)$ ,  $B(3, y_2)$ 在函数 $y = -3x + 2$ 的图象上, 则 $y_1$ 与 $y_2$ 的大小关系应是 ( ).

A.  $y_1 > y_2$

B.  $y_1 = y_2$

C.  $y_1 < y_2$

D. 无法确定

【答案】 A

【解析】  $\because$ 点 $A(-2, y_1)$ ,  $B(3, y_2)$ 在函数 $y = -3x + 2$ 的图象上,

$$\therefore y_1 = -3 \times (-2) + 2 = 6 + 2 = 8,$$

$$y_2 = -3 \times 3 + 2 = -9 + 2 = -7.$$

$$\therefore y_2 < y_1,$$

$\therefore$ B、C、D选项错误, 不符合题意,

$\therefore$ 故选A.

9. 由方程组 $\begin{cases} 2x - 2y = m + 3 \\ x + 2y = 2m + 4 \end{cases}$ 可得 $x$ 与 $y$ 的关系式是 ( ).

A.  $3x = 7 + 3m$

B.  $5x - 2y = 10$

C.  $-3x + 6y = 2$

D.  $3x - 6y = 2$

【答案】 D

【解析】  $\therefore \begin{cases} 2x - 2y = m + 3 \text{ ①} \\ x + 2y = 2m + 4 \text{ ②} \end{cases}$

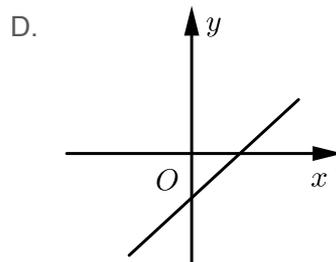
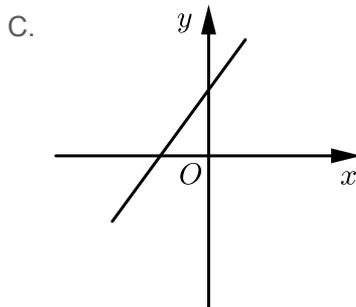
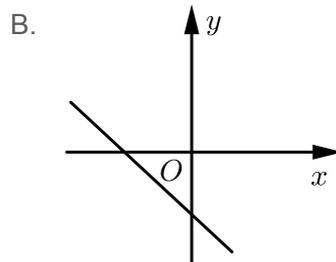
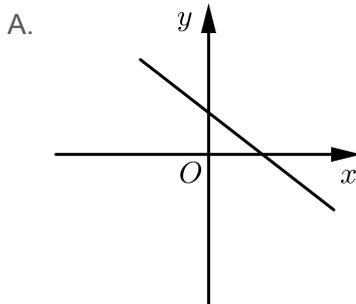
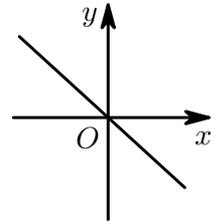
∴由①×2-②得：

$$3x - 6y = 2$$

故D正确．

故选D．

10. 已知正比例函数 $y = kx$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = kx - k$ 的图象是（ ）．



【答案】A

【解析】∵正比例函数 $y = kx$ 的图象经过第二、四象限，

$$\therefore k < 0,$$

∴

一次函数 $y = kx - k$ 的图象经过第一、二、四象限．所以B、C、D选项错误，不符合题意．

故选A．

11. 某运输队接到给武汉运输物资的任务，该队有A型卡车和B型卡车，A型卡车每次可运输6t物资，每天可来回5次，B型卡车每次可运输8t物资，每天可来回4次，若每天派出20辆卡车，刚好运输620t物资，设该运输队每天派出A型卡车 $x$ 辆，B型卡车 $y$ 辆，则所列方程组正确的是（ ）．

A. 
$$\begin{cases} 5x + 4y = 20 \\ 6x + 8y = 620 \end{cases}$$

B. 
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 6x + 8y = 620 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x + y = 20 \\ 5 \times 6x + 4 \times 8y = 620 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} 5x + 4y = 20 \\ 5 \times 6x + 4 \times 8y = 620 \end{cases}$$

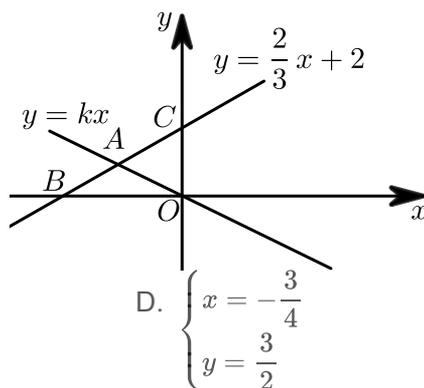
【答案】 C

【解析】 依题意，得： $\begin{cases} x + y = 20 \\ 5 \times 6x + 4 \times 8y = 620 \end{cases}$  .

所以A、B、D选项错误，不符合题意 .

所以答案为：C .

12. 如图，直线 $y = kx(k \neq 0)$ 与 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 在第二象限交于A， $y = \frac{2}{3}x + 2$ 交x轴，y轴分别于B、C两点 .  $3S_{\triangle ABO} = S_{\triangle BOC}$ ，则方程组 $\begin{cases} kx - y = 0 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$ 的解为( ) .



A.  $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

【答案】 C

【解析】 设A点坐标为 $(x_A, y_A)$  .

$$\because 3S_{\triangle ABO} = S_{\triangle BOC} ,$$

$$\therefore 3 \times \frac{1}{2}OB \cdot y_A = \frac{1}{2}OB \cdot OC ,$$

$$\therefore y_A = \frac{1}{3}OC .$$

$\because$  点C为 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 与y轴的交点，

$\therefore$  点C的坐标为 $(0, 2)$  .

$$\therefore y_A = \frac{2}{3} .$$

$\because$  点A在 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 上，

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x_A + 2 ,$$

解得 $x_A = -2$  .

即点A的坐标为 $(-2, \frac{2}{3})$ ，

$\therefore$  方程组 $\begin{cases} kx - y = 0 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$ 的解，即为直线 $y = kx(k \neq 0)$ 与 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 的交点，

$\therefore$  方程组 $\begin{cases} kx - y = 0 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$  .

故选C .

## 二、填空题

(本大题共6小题,每小题4分,共24分)

13. 实数4的算术平方根为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 2

【解析】  $\sqrt{4} = 2$  .

14. 若 $(x - y + 3)^2 + \sqrt{2x + y} = 0$ , 则 $x + y =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】 1

【解析】  $\because (x - y + 3)^2 + \sqrt{2x + y} = 0$  ,

$$\therefore \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore x + y = -1 + 2 = 1 .$$

故答案为 : 1 .

15. 若将直线 $y = kx (k \neq 0)$ 的图象向上平移3个单位长度后经过点(2, 7), 则平移后直线的解析式为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $y = 2x + 3$

【解析】 将函数向上平移3个单位后方程为 $y = kx + 3$ , 将(2, 7)代入方程得 $k = 2$ , 所以

$$y = 2x + 3.$$

16. 已知直线 $y = x + b$ 和 $y = ax - 3$ 交于点 $P(2, 1)$ , 则关于 $x$ 的方程 $x + b = ax - 3$ 的解为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $x = 2$

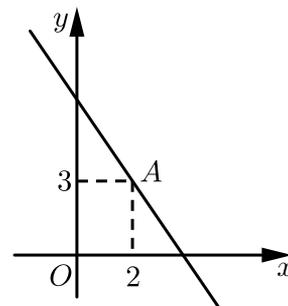
【解析】  $\because$  直线 $y = x + b$ 和 $y = ax - 3$ 交于点 $P(2, 1)$  ,

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } x + b = ax - 3 = 1 ,$$

即关于 $x$ 的方程 $x + b = ax - 3$ 的解为 $x = 2$  .

故答案为 $x = 2$  .

17. 如图，一次函数  $y = kx + b$  ( $k < 0$ ) 的图象经过点  $A$  . 当  $y < 3$  时， $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .



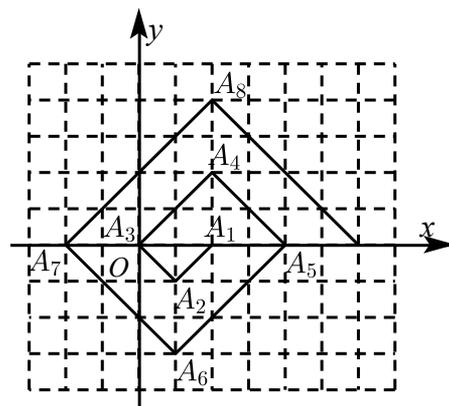
【答案】  $x > 2$

【解析】 由函数图象可知，此函数是减函数，当  $y = 3$  时  $x = 2$ ，

故当  $y < 3$  时， $x > 2$  .

故答案为： $x > 2$  .

18. 如图，在一单位为1的方格纸上， $\triangle A_1A_2A_3$ ， $\triangle A_3A_4A_5$ ， $\triangle A_5A_6A_7$ ， $\dots$ ，都是斜边在  $x$  轴上、斜边长分别为2，4，6， $\dots$  的等腰直角三角形 . 若  $\triangle A_1A_2A_3$  的顶点坐标分别为  $A_1(2, 0)$ ， $A_2(1, -1)$ ， $A_3(0, 0)$ ，则依图中所示规律， $A_{2020}$  的坐标为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $(2, 1010)$

【解析】  $\because$  三角形由三个顶点构成，

$$\therefore 2020 \div 3 = 673 \dots 1,$$

$\therefore A_{2020}$  在第674个三角形的直角顶点，

且这个顶点在第一象限 .

$$\because A_1(2, 0), A_4(2, 2), A_8(2, 4), A_n\left(2, \frac{n}{2}\right),$$

$$\therefore A_{2020}(2, 1010) .$$

故答案为： $(2, 1010)$  .

### 三、解答题

(本大题共9小题,共78分)

19. 计算:

$$(1) \frac{\sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{2}}.$$

$$(2) \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

【答案】(1) 5.

$$(2) \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

【解析】(1)  $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{9}$$

$$= 2 + 3$$

$$= 5$$

故答案为: 5.

$$(2) \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

故答案为:  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

20. 用指定的方法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ x - y = 4 \end{cases} \text{ (代入法).}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \text{ (加减法).}$$

【答案】(1)  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ .

$$(2) \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

【解析】(1)  $\begin{cases} 3x + 4y = 19 \text{ ①} \\ x - y = 4 \text{ ②} \end{cases}$ ,

$$\text{由②得: } x = y + 4 \text{ ③,}$$

将③代入①中,

$$\text{得: } 3(y + 4) + 4y = 19,$$

$$\therefore 3y + 12 + 4y = 19,$$

$$\therefore 7y = 7, \therefore y = 1,$$

将  $y = 1$  代入③中, 得  $x = 1 + 4 = 5$ ,

∴原方程组的解为  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$  .

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y = -5 \text{ ①} \\ 3x - 2y = 12 \text{ ②} \end{cases} ,$$

①×3-②×2得：

$$(2x + 3y) \times 3 - 2(3x - 2y) = -5 \times 3 - 12 \times 2 ,$$

$$\therefore 6x + 9y - 6x + 4y = -15 - 24 ,$$

$$\therefore 13y = -39 ,$$

$$\therefore y = -3 ,$$

将  $y = -3$  代入①中，得

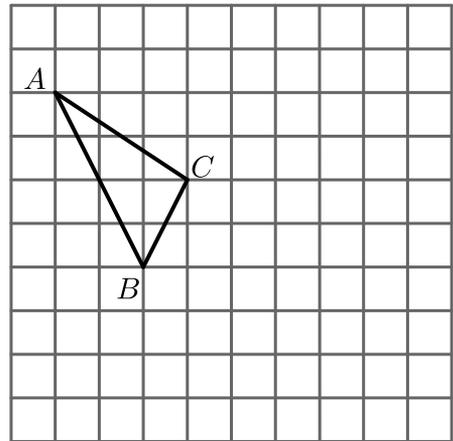
$$2x + 3 \times (-3) = -5 ,$$

$$\therefore 2x = -5 + 9 ,$$

$$\therefore 2x = 4 , x = 2 ,$$

∴原方程组的答案为： $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$  .

21. 在如图所示的正方形网格中，每个小正方形的边长为1，格点三角形（顶点是网格线的交点的三角形） $ABC$ 的顶点 $A$ ， $C$ 的坐标分别为 $(-4, 7)$ ， $(-1, 5)$  .



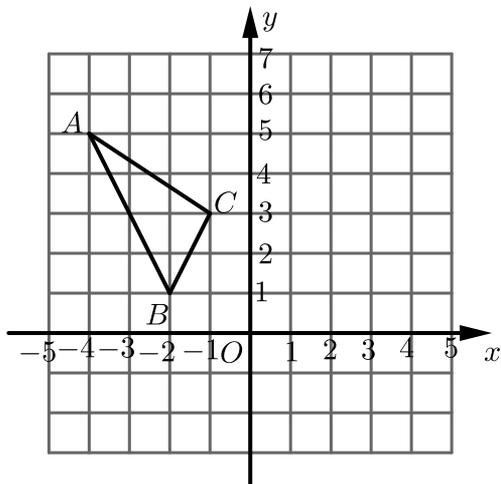
- (1) 请在如图所示的网格平面内画出平面直角坐标系 .  
(2) 请画出 $\triangle ABC$ 关于 $y$ 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$  .  
(3) 直接写出点 $B_1$ 的坐标 .

【答案】(1) 画图见解析 .

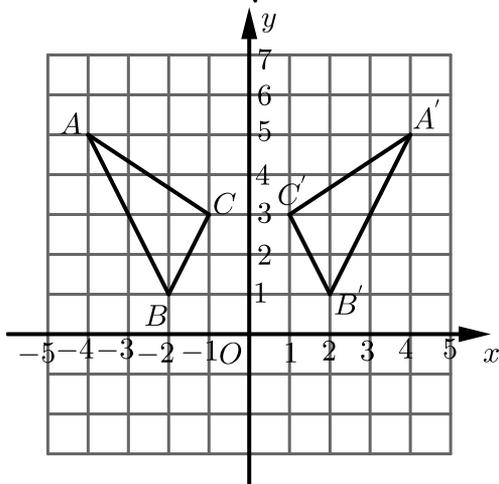
(2) 画图见解析 .

(3)  $(2, 3)$  .

【解析】(1)



( 2 )



( 3 )  $B_1$ 的坐标为(2, 3) .

**22. 解答 .**

( 1 ) 利用平方根的意义 , 求满足条件的  $x$  值 :  $(x - 1)^2 = 36$  .

( 2 ) 已知  $a = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$  ,  $b = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$  , 求  $a^2 - ab$  的值 .

**【答案】** ( 1 )  $x_1 = 7$  ,  $x_2 = -5$  .

( 2 )  $12 - 12\sqrt{2}$  .

**【解析】** ( 1 )  $(x - 1)^2 = 36$  ,

$\therefore x - 1$  为 6 或 -6 ,

$\therefore x_1 - 1 = 6$  或  $x_2 - 1 = -6$  ,

$\therefore x_1 = 7$  ,  $x_2 = -5$  .

( 2 )  $\because a = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$  ,  $b = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$  ,

$\therefore a^2 - ab = a(a - b)$

$= (2\sqrt{3} - \sqrt{6})(2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6})$

$= (2\sqrt{3} - \sqrt{6})(-2\sqrt{6})$

$= 2\sqrt{3} \times (-2\sqrt{6}) - \sqrt{6} \times (-2\sqrt{6})$

$= 12 - 4\sqrt{18}$

$$= 12 - 4 \times 3\sqrt{2}$$

$$= 12 - 12\sqrt{2}.$$

故答案为： $12 - 12\sqrt{2}$  .

23. 已知直线 $l_1: y = kx + b$ 经过点 $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 和点 $B(2, 5)$  .

( 1 ) 求直线 $l_1$ 的表达式 .

( 2 ) 求直线 $l_1$ 与坐标轴的交点坐标 .

【答案】( 1 )  $y = 2x + 1$  .

( 2 )  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  ;  $(0, 1)$  .

【解析】( 1 ) : 直线 $y = kx + b$ 经过点 $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 和点 $B(2, 5)$  ,

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{2}k + b \\ 5 = 2k + b \end{cases},$$

$$\begin{cases} k = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\therefore$  直线 $l_1$ 的表达式为 $y = 2x + 1$  .

( 2 ) 直线 $l_1$ 与 $x$ 轴有交点时 ,  $y = 0$  ,

$$\therefore 2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{交点坐标为}\left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

直线 $l_1$ 与 $y$ 轴交点时 ,  $x = 0$  ,

$$\therefore y = 2 \times 0 + 1 = 1 ,$$

$$\therefore \text{此交点坐标为}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) ; (0, 1) .$$

24. 历下区某中学积极响应国家号召 , 落实垃圾“分类回收 , 科学处理”的政策 , 准备购买A、B两种型号的垃圾分类回收箱共20只 , 放在校园各个合适位置 , 以方便师生进行垃圾分类投放 . 学校共支付费用4240元 , A、B型号价格信息如下 :

型号	价格
A型	200元/只
B型	240元/只

( 1 ) 请问学校购买A型和B型垃圾回收箱各是多少只 ?

( 2 ) 若学校都购买A型垃圾回收箱 , 能节省费用多少元 ?

【答案】( 1 ) A型回收箱14只 , B型回收站6只 .

( 2 ) 能节约240元 .

【解析】(1) 设学校购买A型垃圾回收箱 $x$ 只, 购买B型垃圾回收箱 $y$ 只.

$$\text{由题意得: } \begin{cases} x + y = 20 \\ 200x + 240y = 4240 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 14 \\ y = 6 \end{cases}$$

答: 学校购买A型垃圾回收箱14只, 购买B型垃圾回收箱6只.

$$(2) (240 - 200) \times 6 = 240 \text{元.}$$

答: 能节省费用240元.

## 25. 【阅读材料】

把分母中的根号化去, 使分母转化为有理数的过程, 叫做分母有理化. 通常把分子、分母同时乘以同一个不等于0的数, 以达到化去分母中根号的目的.

$$\text{例如: 化简 } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \text{ 解: } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

【理解应用】

$$(1) \text{ 化简: } \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

$$(2) \text{ 若 } a \text{ 是 } \sqrt{2} \text{ 的小数部分, 化简 } \frac{3}{a}.$$

$$(3) \text{ 化简: } \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2019}}.$$

$$\text{【答案】(1) } \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

$$(2) 3\sqrt{2} + 3.$$

$$(3) \frac{\sqrt{2021}}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解析】(1) } & \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

故答案为:  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ .

$$(2) \because 1 < \sqrt{2} < 2, a \text{ 是 } \sqrt{2} \text{ 的小数部分,}$$

$$\therefore a = \sqrt{2} - 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3}{a} &= \frac{3}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= 3(\sqrt{2} + 1) \\ &= 3\sqrt{2} + 3. \end{aligned}$$

故答案为:  $3\sqrt{2} + 3$ .

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2019}} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + \frac{1}{2}(\sqrt{2021}-\sqrt{2019}) \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1 + \sqrt{5}-\sqrt{3} + \sqrt{7}-\sqrt{5} + \cdots + \sqrt{2021}-\sqrt{2019}) \\
 &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2021}) \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2021}-1) \\
 &= \frac{\sqrt{2021}}{2} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

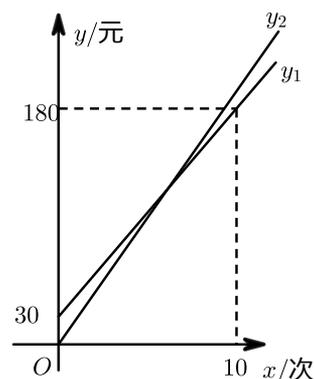
故答案为： $\frac{\sqrt{2021}}{2} - \frac{1}{2}$ .

26. 我市全民健身中心面向学生推出假期游泳优惠活动，活动方案如下.

方案一：购买一张学生卡，每次游泳费用按六折优惠；

方案二：不购买学生卡，每次游泳费用按八折优惠.

设某学生假期游泳 $x$ （次），按照方案一所需费用为 $y_1$ （元），且 $y_1 = k_1x + b$ ；按照方案二所需费用为 $y_2$ （元），且 $y_2 = k_2x$ . 其函数图象如图所示.



- (1) 求 $y_1$ 关于 $x$ 的函数关系式，并直接写出单独购买一张学生卡的费用和购买学生卡后每次游泳的费用.
- (2) 求打折前的每次游泳费用和 $k_2$ 的值.
- (3) 八年级学生小明计划假期前往全民健身中心游泳8次，应选择哪种方案所需费用更少？说明理由.

**【答案】** (1) 30元；15元； $y_1 = 15x + 30$ .

(2) 25，20.

(3) 方案一所需费用更少，证明见解析.

**【解析】** (1) 设未打折前每次游泳的费用为 $a$ 元，

$$\text{方案一： } y_1 = 0.6a \cdot x + b,$$

由图象可知当 $x = 0$ 时， $y = 30$ 当 $x = 10$ 时 $y = 180$ ，代入 $y_1 = 0.6ax + b$ 得，

$$\begin{cases} b = 30 \\ 0.6a \cdot 10 + b = 180 \end{cases}$$

解方程组得： $a = 25, b = 30$  .

$$y_1 = 0.6 \times 25x + 30 = 15x + 30,$$

故单独购买一张游泳卡费用为30（元），

购买学生卡后每次游泳费用为 $0.6 \times 25 = 15$ （元） .

（2）由（1）可知，打折前的每次费用为25元，

$$y_2 = 25 \times x \times 0.8 = 20x,$$

$$\therefore k_2 = 20.$$

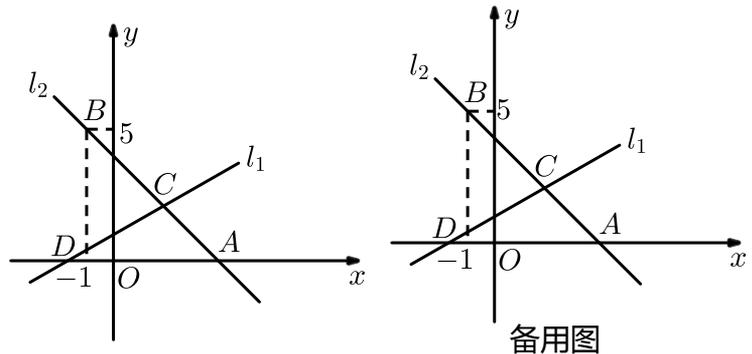
（3）当 $x = 8$ 时，方案一所需费用 $y_1 = 15 \times 8 + 30 = 150$ （元） .

方案二所需费用 $y_2 = 20 \times 8 = 160$ （元） .

$$\therefore y_1 < y_2,$$

$\therefore$ 方案一所需费用更少 .

27. 如图，直线 $l_1: y = kx + 1$ 与 $x$ 轴交于点 $D$ ，直线 $l_2: y = -x + b$ 与 $x$ 轴交于点 $A$ ，且经过定点 $B(-1, 5)$ ，直线 $l_1$ 与 $l_2$ 交于点 $C(2, m)$  .



- （1）求 $k$ 、 $b$ 和 $m$ 的值；
- （2）求 $\triangle ADC$ 的面积；
- （3）在 $x$ 轴上是否存在一点 $E$ ，使 $\triangle BCE$ 的周长最短？若存在，请求出点 $E$ 的坐标；若不存在，请说明理由；
- （4）若动点 $P$ 在线段 $DA$ 上从点 $D$ 开始以每秒1个单位的速度向点 $A$ 运动．设点 $P$ 的运动时间为 $t$ 秒．是否存在 $t$ 的值，使 $\triangle ACP$ 为等腰三角形？若存在，直接写出 $t$ 的值；若不存在，请说明理由 .

【答案】（1） $k = \frac{1}{2}; b = 4; m = 2$  .

（2） $S_{\triangle ADC} = 6$  .

（3）存在．点 $E$ 坐标为 $(\frac{8}{7}, 0)$  .

（4） $t$ 的值为： $2; -2\sqrt{2} + 6; 4$  .

【解析】（1） $\because$ 直线 $l_1: y = kx + 1$ 与 $x$ 轴交于点 $D$ ,

直线 $l_2: y = -x + b$ 与 $x$ 轴交于点 $A$ , 且经过定点 $B(-1, 5)$ ,

$$\therefore 5 = -(-1) + b,$$

$$\therefore b = 4,$$

$\therefore l_2$ 为 $y = -x + 4$ , 且点 $C$ 为 $(2, m)$ .

$$\therefore m = -2 + 4 = 2.$$

$\therefore$ 点 $C$ 为 $(2, 2)$ , 且 $l_1: y = kx + 1$ 过点 $C(2, 2)$ ,

$$\therefore 2 = 2k + 1,$$

$$\therefore k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1,$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}; b = 4; m = 2.$$

(2)  $l_2$ 为:  $y = -x + 4$ ,  $y = 0$ 时,  $x = 4$ ,

$$\therefore A(4, 0).$$

$l_1$ 为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ ,  $y = 0$ 时,  $x = -2$ ,

$$\therefore D(-2, 0).$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{2} \times (4 + 2) \times 2 = 6.$$

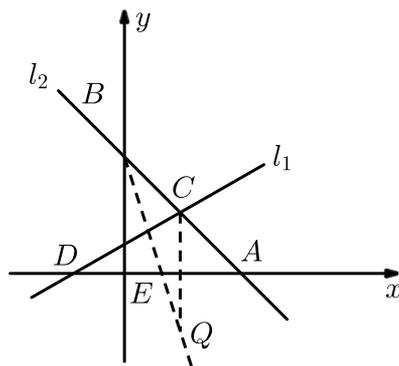
(3) 由(2)可知,  $B$ 为定点,  $C$ 为定点,

$\therefore BC$ 为定长.

$$C_{\triangle BCE} = BC + CE + BE.$$

当 $\triangle BCE$ 的周长最短时,  $CE + BE$ 最小.

过 $x$ 轴作点 $C$ 的对称点 $Q(2, -2)$ 连接 $BQ$ 与 $x$ 轴交点即为点 $E$ .



$\therefore$ 设 $BQ$ 解析式为 $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} -2 = 2k + b \\ 5 = -k + b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{7}{3} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{7}{3}x + \frac{8}{3}, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, 即 } -\frac{7}{3}x + \frac{8}{3} = 0,$$

$$\therefore -\frac{7}{3}x = -\frac{8}{3}.$$

$$\therefore x = -\frac{8}{3} \times \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{8}{7},$$

$\therefore$ 点 $E$ 坐标为 $\left(\frac{8}{7}, 0\right)$ .

(4) 设点 $P$ 坐标为 $(-2+t, 0)$ , 且 $C(2, 2)$ ,  $A(4, 0)$ .

当 $\triangle ACP$ 为等腰三角形时,

$$AC = CP; AC = AP; AP = CP.$$

$$\textcircled{1} AC = CP \text{ 时, } (4-2)^2 + (0-2)^2 = (-2+t-2)^2 + (0-2)^2.$$

$$\therefore (4-2)^2 = (t-4)^2,$$

$$\therefore 2 = t-4 \text{ 或 } -2 = t-4,$$

$$\therefore t_1 = 6 \text{ 或 } t_2 = 2.$$

$\therefore P(4, 0)$ 与点 $A$ 重合, 舍弃.

$\therefore P(0, 0)$ .

$$\textcircled{2} AC = AP \text{ 时, } (4-2)^2 + (0-2)^2 = (-2+t-4)^2 + (0-0)^2$$

$$\therefore 4+4 = (t-6)^2,$$

$$\therefore 8 = (t-6)^2,$$

$$\therefore t_3 = 2\sqrt{2} + 6; t_4 = -2\sqrt{2} + 6.$$

又 $\therefore t_3 = 2\sqrt{2} + 6$ 时,

点 $P$ 为 $(4 + 2\sqrt{2}, 0)$ , 此时 $P$ 不在线段 $DA$ 上.

$\therefore$ 舍弃 $t_3$ .

当 $t_4 = -2\sqrt{2} + 6$ 时,

点 $P$ 为 $(4 - 2\sqrt{2}, 0)$ , 此时 $P$ 在线段 $DA$ 上.

符合题意.

$$\textcircled{3} AP = CP \text{ 时, } (-2+t-4)^2 + (0-0)^2 = (-2+t-2)^2 + (0-2)^2,$$

$$\therefore (t-6)^2 + 0 = (t-4)^2 + 4,$$

$$\therefore t^2 + 36 - 12t = t^2 + 16 - 8t + 4,$$

$$\therefore t^2 + 36 - 12t - t^2 - 16 - 4 + 8t = 0$$

$$\therefore 16 - 4t = 0,$$

$$\therefore t = 4.$$

此时 $P(2, 0)$ .

综上所述,  $t$ 的值为:  $2; -2\sqrt{2} + 6; 4$ .

### 附加题

(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

28. 化简 $\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

【解析】  $\because \sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{24}}$   
 $= \sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{3})^2}$  ,  
 $\therefore \sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{8} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$  .  
故答案为 :  $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$  .

29. 已知  $\begin{cases} x - 14\sqrt{xy} = 11 \\ y + 16\sqrt{xy} = 14 \end{cases}$  , 则  $\sqrt{x} + \sqrt{y} =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】 5

【解析】  $\begin{cases} x - 14\sqrt{xy} = 11 \text{①} \\ y + 16\sqrt{xy} = 14 \text{②} \end{cases}$  ,  
 $\therefore \text{①} + \text{②}$  得到 :  
 $x - 14\sqrt{xy} + y + 16\sqrt{xy} = 11 + 14$  ,  
 $\therefore x + y + 2\sqrt{xy} = 25$  ,  
 $\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 25$  ,  
又  $\because \sqrt{x} \geq 0$  ,  $\sqrt{y} \geq 0$  ,  
 $\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$  ,  
 $\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$  ,  
 $\therefore$  答案为 : 5 .

30. 已知三个数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}$  ,  $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4}$  ,  $\frac{ca}{c+a} = \frac{1}{5}$  , 则  $\frac{abc}{ab+bc+ca}$  的值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{1}{6}$

【解析】 由题意知  $3abc = ac + bc$  ,  $4abc = ab + ac$  ,  $5abc = bc + ab$  ,  
 $\therefore \frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{6}$  .

31. 一次函数  $y = ax + b$  的图象  $l_1$  关于直线  $y = -x$  轴对称的图象  $l_2$  的函数表达式是 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$

【解析】 一次函数  $y = ax + b$  的图象与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ 、 $B(0, b)$  两点 .  
 $A$ 、 $B$  两点关于  $y = -x$  对称后为  $A'\left(0, \frac{b}{a}\right)$ 、 $B'(-b, 0)$  .  
不妨设过  $A'$ 、 $B'$  两点的直线解析式为  $y = kx + \frac{b}{a}$  , 代入  $B'$  得 ,  
 $-bk + \frac{b}{a} = 0$  , 解得  $k = \frac{1}{a}$  .

$$\therefore y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a} .$$

即一次函数 $y = ax + b$ 点的图象关于 $y = -x$ 轴对称的图象的函数解析式为

$$y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a} .$$